

ApproximationDerivee

Documents d'accompagnement
Algorithmique et programmation
nouveau programme du lycée 2019

1 Dérivée d'une fonction

1.1 Présentation de l'activité

- **Niveau de classe :**
- Classe de première de la voie générale (spécialité mathématiques).
- Classe de première de la voie technologique (tronc commun).
- **Références aux programmes :**
- Spécialité de première générale : *écrire la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné.*
- Enseignement commun de première technologique : *à l'aide d'un logiciel, visualiser la position limite des sécantes à une courbe en un point.*
- **Description :** Activité d'introduction de la notion de dérivée en distinguant le point de vue local (nombre dérivé) et le point de vue global (fonction dérivée).

1.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition Le nombre dérivé d'une fonction f en un point x_0 est la limite (lorsqu'elle existe) du taux de variation de f en ce point. C'est la limite de la pente des sécantes issues du point de la courbe d'abscisse x_0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

1.2.1 Pente d'une sécante en un point

La fonction `coefDirSecante` calcule la pente de la sécante à la courbe représentative d'une fonction f préalablement définie (ci-dessous la fonction carré) entre le point d'abscisse x_0 et le point d'abscisse $x_0 + h$.

```
def f(x):  
    return x**2  
  
def coefDirSecante(x0,h):  
    coef=(f(x0+h)-f(x0))/h  
    return coef  
  
coefDirSecante(1,0.1)
```

Out[1]: 2.1000000000000002

Suggestions pédagogiques

- **Expliquer un programme**

Que représentent les paramètres de la fonction `coefDirSecante` ?

- **Écrire un programme**
- Modifier le contenu de la fonction `f`.
- Écrire la fonction `coefDirSecante`.
- **Tester** la fonction `coefDirSecante` pour $x_0 = 1$ et pour de petites valeurs de h .

En déduire une valeur approchée de $f'(1)$ où f désigne la fonction carré.

Sécante passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + h, f(x_0 + h))$

On cherche à tracer la sécante à la courbe représentative de la fonction f passant par les points d'abscisses x_0 et $x_0 + h$. La fonction `secante` prend en paramètres les deux nombres flottants x_0 et h , et renvoie les listes $[x_0, x_0 + h]$ et $[f(x_0), f(x_0 + h)]$ afin de tracer la sécante avec `matplotlib`.

```
def secante(x0, h):
    return [x0, x0+h], [f(x0), f(x0+h)]
```

```
secante(1, 0.1)
```

Out[2]: ([1, 1.1], [1, 1.2100000000000002])

Liste des coefficients directeurs de sécantes en un point

On souhaite afficher la liste des pentes des sécantes à la courbe représentative de la fonction f passant par les points d'abscisse x_0 et $x_0 + h$ pour des valeurs de h tendant vers 0.

```
def listeCoefDir(n):
    liste = [1-i/n for i in range(n)]
    x_0=1
    return [coefDirSecante(x_0, h) for h in liste]
```

```
listeCoefDir(10)
```

Out[3]: [3.0,
2.9,
2.8000000000000003,
2.6999999999999997,
2.6000000000000001,
2.5,
2.3999999999999999,
2.3000000000000003,
2.2,
2.1000000000000023]

Représentations graphiques

Tracé d'une sécante en un point

Dans cette partie, on trace la sécante à la courbe de la fonction f entre le point d'abscisse 1 et le point d'abscisse $1 + h$.

Importation de la bibliothèque graphique

```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
```

Fonction renvoyant la liste des éléments de la subdivision d'un intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de même longueur

Le nom de la fonction est `subdivisionIntervalle`.

Elle prend comme paramètres :

- les bornes a et b de l'intervalle $[a, b]$
- le nombre N de sous-intervalles de la subdivision

Elle renvoie la liste des éléments de la subdivision.

N.B : on considère ici des subdivisions à pas constant.

```
def subdivisionIntervalle(a,b,N):
    pas = (b-a)/N
    return [a+i*pas for i in range(N+1)]
```

Suggestions pédagogiques

- **Expliquer un programme**

Le programme précédent étant fourni, demander aux élèves d'expliquer : - à quoi correspond la variable `pas` et comment elle est calculée ; - l'instruction de la ligne 3 ; - quel est le premier élément de la liste renvoyée ; - quel est le dernier élément de la liste renvoyée.

- **Compléter un programme**
- Le programme précédent étant fourni en remplaçant la ligne 2 par `pas= ...`, demander aux élèves de compléter la ligne 2.
- Le programme précédent étant fourni en remplaçant la ligne 3 par `[... for i in range(N+1)]`, demander aux élèves de compléter la ligne 3.
- **Tester un programme**

Tester la fonction `subdivisionIntervalle` sur l'intervalle $[1, 8]$ subdivisé en 8 parties égales.

Représentation graphique de la fonction f et tracé d'une sécante

Le programme ci-dessous est séparé en trois parties : - les constantes (modifiables par l'enseignant) ; - les listes contenant les abscisses et les ordonnées des points de la courbe ; - les instructions de représentation graphique.

```
# constantes
a = 0
b = 2
h = 0.75
x0 = 0.5
nbSubdivision = 1000

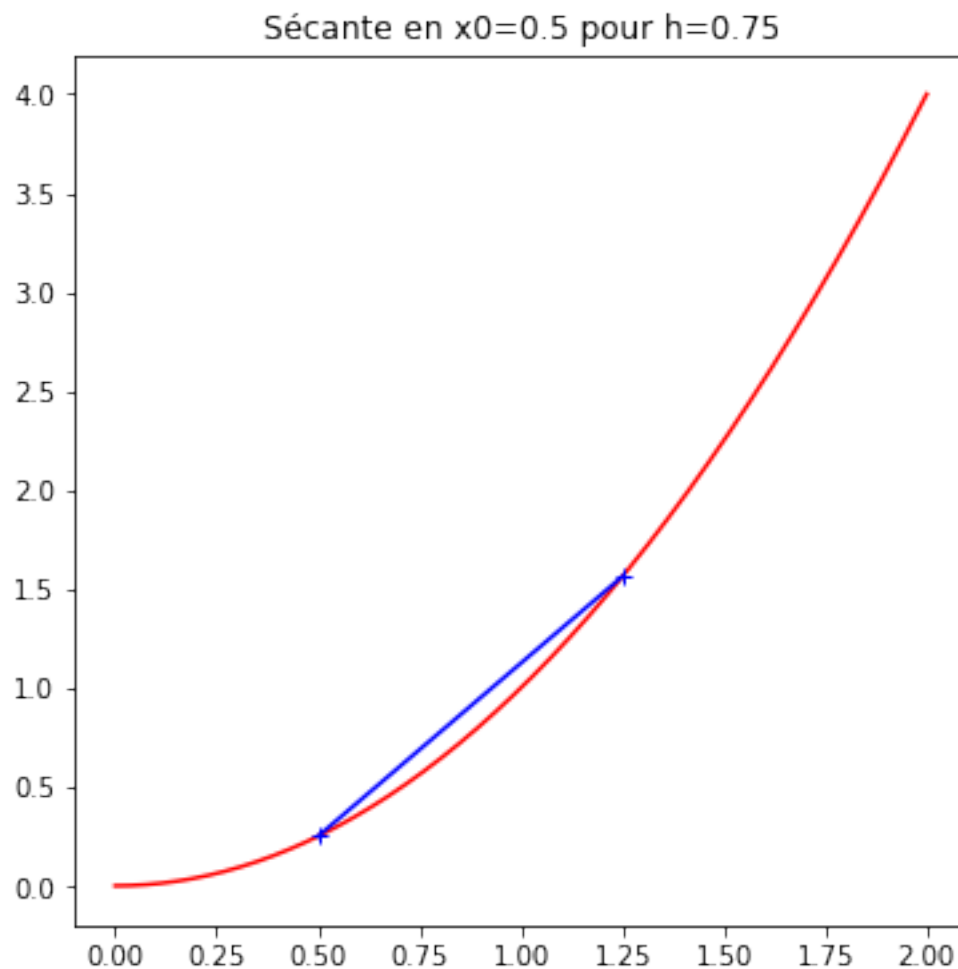
# points de la courbe
```

```

abscisses = subdivisionIntervalle(a,b,nbSubdivision)
ordonnees = [f(x) for x in abscisses]
abscisseSecante,ordonneeSecante = secante(x0,h)

# paramètres figure
fig, ax1 = plt.subplots(1,figsize=(6, 6))
ax1.plot(abscisses,ordonnees,'r')
ax1.plot(abscisseSecante,ordonneeSecante,'b+-')
ax1.set_title('Sécante en x0={} pour h={}'.format(x0,h,coefDirSecante(1,h)))
plt.show()

```



1.3 Fonction dérivée

La fonction qui, à tout réel x , associe le nombre dérivé de f en x est la fonction dérivée de f et se note f' .

1.3.1 Approximation de la fonction dérivée par la liste des coefficients directeurs des sécantes.

La fonction suivante, nommée `listeCoefDir`, renvoie la liste des coefficients directeurs des sécantes à la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$ pour une subdivision de cet intervalle en n sous-intervalles de même longueur. Elle prend en paramètre ce nombre n .

```
## Alternative en utilisant la fonction subdivisionIntervalle ##
```

```
def listeCoefDir(n):  
    abscisses = subdivisionIntervalle(0,2,n)  
    h=2/n  
    return [coefDirSecante(x,h) for x in abscisses]
```

```
print(listeCoefDir(10))
```

```
[0.20000000000000004, 0.6000000000000001, 1.0000000000000002, 1.4000000000000001, 1.7999999999999999]
```

Suggestions pédagogiques

- **Compléter un programme**

Remplacer les lignes 4 et 5 du programme précédent par `h=...` et `return [... for x in abscisses]` et demander aux élèves de les compléter. * **Expliquer un programme**

Le programme précédent étant fourni, demander aux élèves d'expliquer : - l'instruction de la ligne 5 ; - le nombre d'éléments contenus dans la liste de la ligne 5.

- **Tester un programme**

Tester la fonction `ListeCoefDir` pour $n = 10$ (remplacer la ligne 7 par `...` dans le programme fourni aux élèves).

1.3.2 Courbe approchée de la fonction dérivée.

Le programme suivant trace une courbe approchée de la fonction dérivée de la fonction carré sur l'intervalle $[0;2]$ subdivisé en n sous-intervalles. L'ordonnée du point d'abscisse x de cette courbe est égale au taux de variation (pente de la sécante) de la fonction carré entre x et $x + \frac{2}{n}$. La courbe

approchée est la droite d'équation $y = 2x + \frac{2}{n}$.

```
%matplotlib inline
```

```
n=50
```

```
abscisses = subdivisionIntervalle(0,2,n)
```

```
ordonnees = listeCoefDir(n)
```

```
#paramètres figure
```

```
fig, ax1 = plt.subplots(1,figsize=(15, 6))
```

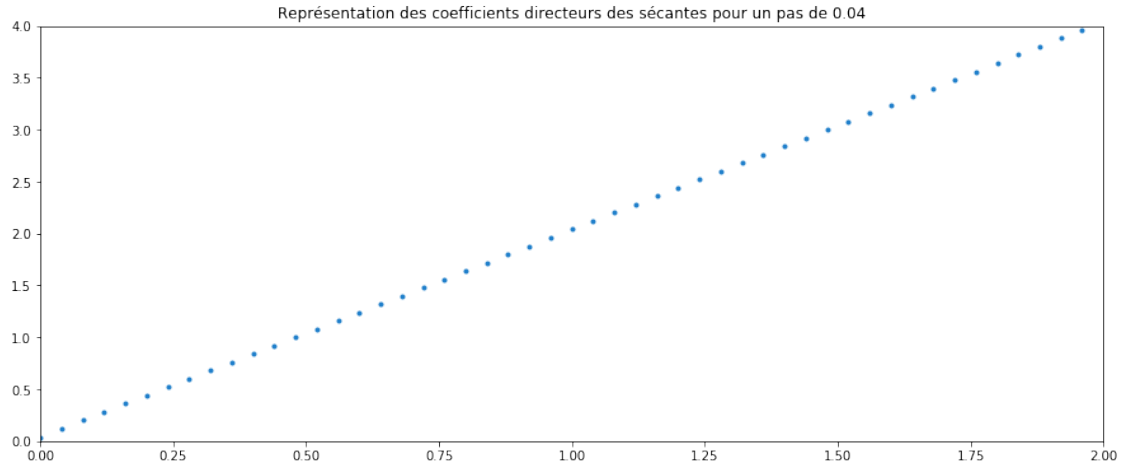
```
ax1.plot(abscisses,ordonnees,'.', color="#1e7fcb")
```

```
ax1.set_xlim(( 0, 2))
```

```
ax1.set_ylim((0, 4))
```

```
ax1.set_title('Représentation des coefficients directeurs des sécantes pour
```

```
plt.show())
```



Suggestions pédagogiques

- **Tester** le programme pour différentes valeurs de n .
- **Observer** l'allure de la courbe de la fonction dérivée.
- **Conjecturer** l'expression de f' en prenant des valeurs assez grandes pour n .

1.4 Pour aller plus loin : dérivation de la fonction cube

En changeant la définition de la fonction f , on peut étudier de la même manière le nombre dérivé en un point et la fonction dérivée d'autres fonctions, par exemple de la fonction cube.

1.4.1 Pente d'une sécante

```
def cube(x):
    return x**3
def coefDirSecanteCube(a,h):
    coef=(cube(a+h)-cube(a))/h
    return coef
print(coefDirSecante(1,0.1))
```

2.1000000000000002

1.4.2 Fonction dérivée de la fonction cube

La fonction suivante, nommée `listeCoefDir`, renvoie la liste des coefficients directeurs des sécantes à la courbe de la fonction cube aux points de cette courbe correspondant à une subdivision de l'intervalle $[-2;2]$ en n sous-intervalles de même longueur. Elle prend en paramètre ce nombre n .

```
def listeCoefDirCube(n):
    abscisse = subdivisionIntervalle(-2,2,n)
    h=4/n
    return [coefDirSecanteCube(x,h) for x in abscisse]
```

```
print(listeCoefDirCube(10))
```

```
[9.759999999999996, 5.920000000000001, 3.039999999999999, 1.119999999999994, 0.159999999999999]
```

1.4.3 Représentation de la liste des coefficients directeurs des sécantes pour un pas donné

```
%matplotlib inline
n=50
```

```
abscisse = subdivisionIntervalle(-2,2,n)
ordonnee=listeCoefDirCube(n)
```

```
#paramètres figure
```

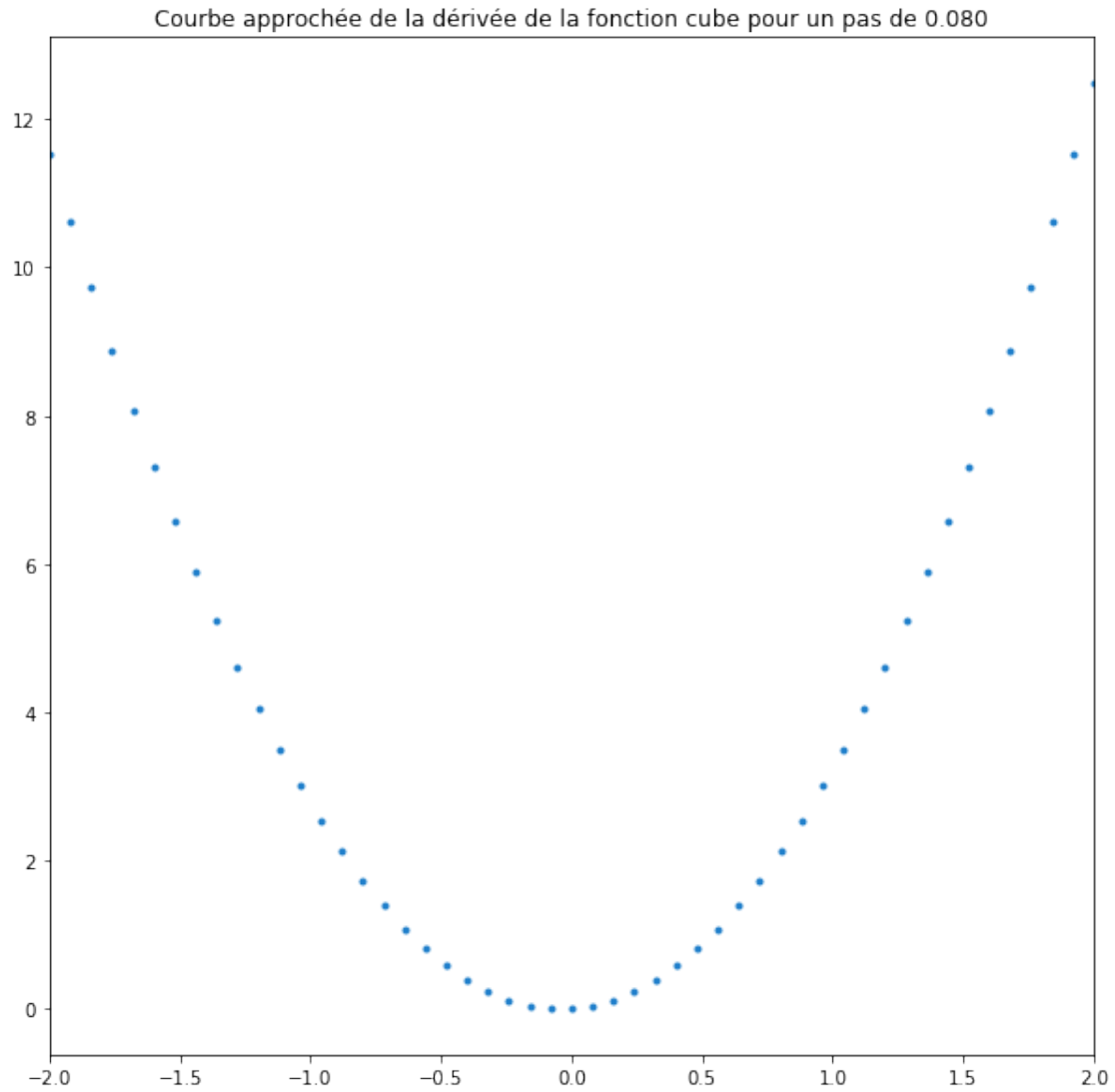
```
fig, ax1 = plt.subplots(1,figsize=(10, 10))
```

```
ax1.plot(abscisse,ordonnee, '.', color="#1e7fcb")
```

```
ax1.set_xlim((-2, 2))
```

```
ax1.set_title('Courbe approchée de la dérivée de la fonction cube pour un pas donné')
```

```
plt.show()
```



Suggestions pédagogiques

- **Tester** le programme pour différentes valeurs de n .
- **Observer** l'allure de la courbe de la fonction dérivée.
- **Conjecturer** la formule de f' en prenant des valeurs assez grandes pour n .