Travaux dirigés de mathématiques discrètes

pour les élèves de l'IUT de Lens de première année

Mouny SAMY MODELIAR

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles

Exercice 1 *Décrire en extension les ensembles suivants :*

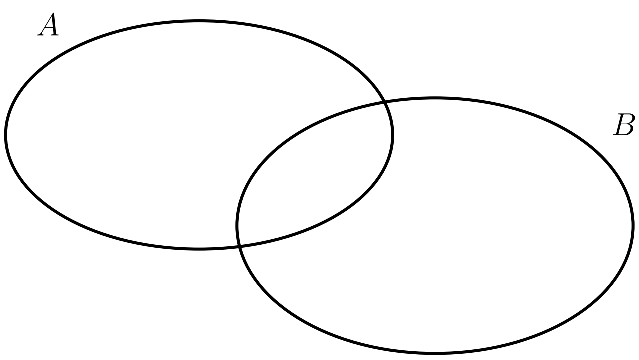
$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\right\} \\ B &= \{y \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \textit{ tel que } y = 2k\} \\ C &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6 = x\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 2 *Donner la définition en compréhension des ensembles suivants :*

$$]5,\ 12] \quad \mathbb{R} \backslash \{-4, 4\} \quad]0,\ 5[\quad]-\infty,\ 6] \quad \{-\infty,\ 6\}.$$

Exercice 3 *Sur le diagramme de Venn ci-dessous, représenter les objets $x,\ y$ et z sachant que :*

1. $x \in A$ *et* $x \notin B$
2. $y \subset B$
3. $z \in A$ *et* $z \in y$.



Exercice 4 *Dans chacun des cas suivants faire la réunion des ensembles A et B.*

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \textit{ impaire}\}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \textit{ pas divisible par } 3\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$
3. $A = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2\}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - y\}$.

Exercice 5 *Dans chacun des cas suivants faire l'intersection des ensembles A et B.*

1. *A est l'ensemble des rectangles* $\quad$ *B est l'ensembles des losanges*
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$
3. $A = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - y\}$.

Exercice 6 *On pose :*

$$A = [-5,\ -1] \quad B =]-3,\ 3] \quad C = [0,\ 12[.$$

Décrire les ensembles suivants :

$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cup B$, $A \cup C$, $\overline{B} \cup \overline{C}$, $\overline{A} \cap C$, $B \cap C$, $A \cup (B \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$, $\overline{A} \cap \left(\overline{B} \cup C\right)$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 7 *Soit $E = \{a,\ b,\ c\}$. Étudier en extension l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.*

Exercice 8 *Dans chacun des cas suivants déterminer si les ensembles A et B sont égaux.*

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq |x|\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq |x|\}$
3. $A = \mathbb{Z}$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x \textit{ pair}\}$.

Exercice 9 *Trouver trois objets x, y et z de manière à rendre simultanément vrais les quatre prédicats suivants :*

$$\begin{array}{ccc} x & \in & y \\ y & \in & z \\ x & \notin & z \\ x & \not\subset & z \end{array}$$

Exercice 10 *Définir en compréhension les ensembles suivants :*

1. $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$
2. $B = \{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$
3. $C = \{4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$ *(penser au nombre de diviseurs).*

Definition 1 *Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A et de B l'ensemble*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \textit{ et } y \in B\}$$

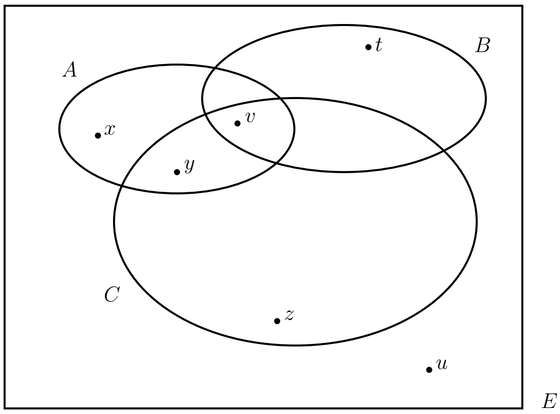
Exercice 11 *On pose*

$$A = \{2,\ 5,\ 8\} \textit{ et } B = \{4,\ 6\}$$

Déterminer $A \times B$.

Exercice 12

En se reportant au diagramme ci-contre, quelles sont les affirmations vraies parmi les suivantes ?



1. $y \in A \cap C$
2. $x \in B \setminus A$
3. $u \in \overline{A \cup B \cup C}$
4. $z \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
5. $y \in C \setminus \overline{A}$
6. $y \in \overline{C \oplus A}$
7. $t \in B \oplus C$
8. $v \in A \cap B \cap \overline{C}$
9. $\{y,\, t,\, v\} \subset A \cap B$
10. $\{x,\, t\} \subset A \oplus B$
11. $t \in \overline{C \setminus B}$
12. $\{u,\, z\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 13 *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E,*

1. *Montrer que*
$$\overline{A} \oplus \overline{B} = A \oplus B$$
$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$
$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)\,.$$
2. *Comparer $\overline{A} \times \overline{B}$ et $\overline{A \times B}$.*

Proposition 1 *Soit A et B deux ensembles finis, alors*
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|\,.$$

Exercice 14 *Pour sa dernière exposition à New-York, Caroline D. a présenté 120 tableaux dont 64 étaient à vendre. Les tableaux étaient numérotés de 1 à 120, dans un ordre voulu par l'artiste. Pour une raison inconnue Caroline D. ne voulait pas que les tableaux vendables portent des numéros comportant le chiffre 7.*

Pourquoi ce désire ne fut-il pas satisfait ?

Proposition 2 *Soit A, B et C trois ensembles finis, alors*
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\,.$$

Exercice 15 *Une enquête révèle que, sur 100 étudiants interrogés, 28 suivent le cours de mathmatiques, 30 suivent le cours d'informatique, 42 suivent le cours d'économie, 10 suivent le cours de mathématiques et d'économie, 8 suivent les cours de mathématiques et d'informatique, 5 suivent les cours d'économie et d'informatique, et enfin 3 suivent les trois cours.*

Sur ces 100 étudiants, combien y en a-t-il

1. *qui ne suivent aucun de ces trois cours ?*
2. *qui ne suivent que le cours d'économie ?*
3. *qui suivent au moins deux des trois cours ?*

4. *qui suivent au plus deux des trois cours ?*

Exercice 16 *Soit E un ensemble fini et $A,\ B,\ C$ trois parties de E. On pose :*

$$D = (A \cup B) \cap \overline{C}$$

1. *Représenter D par un diagramme de Venn.*
2. *Exprimer $|D|$ en fonction des nombres $|A|,\ |B|,\ |A \cap B|,\ |B \cap C|,\ |A \cap C|$ et $|A \cap B \cap C|$.*
3. ***Application :*** *Dans une école mixte, les élèves étudient 0, 1, ou plusieurs langues étrangères. Sachant que :*
   (a) 416 *élèves étudient l'anglais.*
   (b) 212 *élèves étudient l'allemand.*
   (c) *Il y a 276 garçons dans l'école.*
   (d) *Parmi les garçons, 103 font de l'anglais et 78 font de l'allemand.*
   (e) *Il y a 98 élèves qui font à la fois de l'anglais et de l'allemand, et que parmi eux 30 sont des garçons.*

Combien de filles étudient au moins une des deux langues, anglais ou allemand ?
Combien de filles étudient une langue exactement ?

Exercice 17 *Soient A, B et C trois sous ensemble d'un ensemble E.*
Montrer les propositions suivantes :

1. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.
2. $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.
3. $A = B \Longleftrightarrow (A \cup C = B \cup C \text{ et } A \cap C = B \cap C)$.

Exercice 18 *On étudie une population de 100 étudiants. Parmi eux :*
32 *étudient la Médecine, 20 la Physique, 45 la Biologie.*
15 *étudient la Médecine et la Biologie, 7 la Médecine et la Physique, 10 la Physique et la Biologie.*
30 *n'étudient aucune de ces trois matières.*
Combien étudient les trois matières en même temps ? Combien étudient Médecine et Biologie, mais pas physique ? Combien étudient une seule matière ? Représenter la situation par un diagramme de Venn et répondre à ces questions.

Exercice 19 *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'ensemble. Montrer qu'il existe toujours un ensemble C, ainsi qu'une surjection $g : A \to C$ et une injection $h : C \to B$ tels que*

$$f = h \circ g.$$

Exercice 20 *Si une application d'ensemble $f : A \to B$ est bijective, démontrer qu'il en est de même pour f^{-1} et déterminer son application réciproque.*

Exercice 21 *Dans chaque cas dire si l'application d'ensemble est injective, surjective ou bijective.*
Quand elle est bijective déterminer l'application réciproque.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+7 \end{cases}$.
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x-3 \end{cases}$.

3. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\{x\in\mathbb{R}\mid 9\geq x\geq 4\} & \rightarrow & \{x\in\mathbb{R}\mid 96\geq x\geq 21\}\\ x & \mapsto & x^2+2x-3\end{array}\right.$.
4. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 3x-2\left|x\right|\end{array}\right.$.
5. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & e^x+1\end{array}\right.$.
6. $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}\\ x & \mapsto & x\left(x+1\right)\end{array}\right.$.

Exercice 22 *Soit*

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}\\ n & \mapsto & n+\left(-1\right)^n\end{array}\right..$$

1. *Montrer que n et $f\left(n\right)$ sont toujours de parité différente.*
2. *Montrer que f est bijective.*
3. *Calculer $f\left(f\left(n\right)\right)$. En déduire une expression de f^{-1} et résoudre l'équation :*

$$347=n+\left(-1\right)^n$$

dans laquelle n désigne en entier inconnu.

Exercice 23 *On considère les deux applications f et g de $\mathbb{N}_9^*$ vers lui-même définies par leurs tables des valeurs :*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f\left(x\right)$	6	4	7	8	9	3	5	1	2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g\left(x\right)$	1	2	7	4	5	6	3	8	9

.

1. *Représenter de la même façon les applications :*

$$g\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f \text{ et } f\circ g.$$

2. *Montrer que f est bijective. Représenter de la même façon son application réciproque.*

Exercice 24 *Démontrer que l'ensemble des mots binaires est dénombrable.*

Exercice 25 *Sachant que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, démontrer que $\mathbb{N}^n est$ dénombrable pour tout entier naturel n.*

Exercice 26 *On associe à tout couple (x,y) de $\mathbb{N}^2$ l'entier naturel*

$$u=2^y\left(2x+1\right)-1.$$

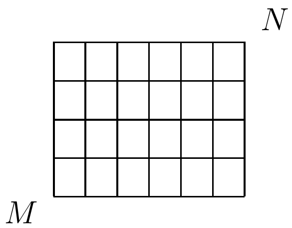
1. *Lorsque $x=5$ et $y=3$ écrire x et u en base deux.*
2. *Dans le cas général quelle est l'écriture de u en base deux ?*
3. *En déduire que l'application qui associe u au couple (x,y) est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.*

Chapitre 2

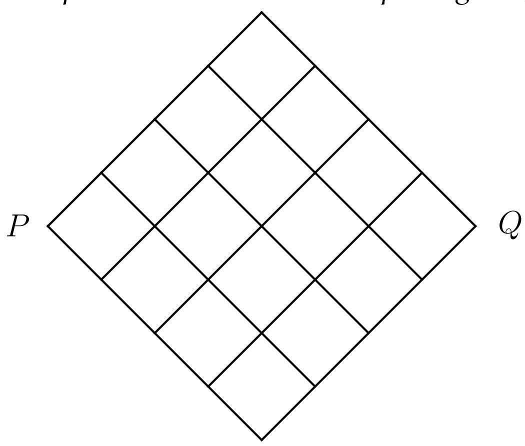
Combinatoire

Exercice 27 *Le dimanche matin un parieur prend* 5000 *paris différents pour le tiercé de l'après-midi. Que peut-on dire du nombre de chevaux engagés dans la course ?*

Exercice 28 *Pour aller de* M *à* N *une fourmi se déplace le long des mailles d'un grillage*



1. *Si elle va toujours de la gauche vers la droite et du bas vers le haut combien d'itinéraires différents peut-elle suivre sachant que le grillage comprend* n *mailles en largeur et* p *mailles en hauteur ?*
2. *Un autre jour elle va de* P *à* Q *en suivant un autre grillage. Elle progresse toujours de la gauche vers la doite mais cette fois elle peut monter ou descendre. Combien d'itinéraires différents peut-elle suivre sachant que le grillage est un carré de* n *mailles de côté ?*



Exercice 29 *Quel est le développement de* $(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n$ *?*

Exercice 30 *On se donne deux nombres entiers* n *et* r*. Si les nombres* $x_1, x_2, ..., x_r$ *sont des entiers naturels inconnus, combien l'équation*

$$x_1 + x_2 + ... + x_r = n$$

a-t-elle de solutions distinctes ?

Exercice 31 *On regroupe n personnes en k équipes. La première équipe comprend n_1 personnes, la seconde n_2, etc...*

1. *Combien de réparttions sont possibles ? (Exprimer ce nombre à l'aide des coefficients du binôme, puis à l'aide de $n_1!$, de $n_2!$, etc...)*
2. *En déduire le résultat suivant :"soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soient $p_1, p_2, ..., p_r$ des entiers positifs dont la somme est inférieure ou égale à n, alors le produit $p_1!p_2!...p_r!$ divive $n!$"*

Exercice 32 *Soit P_0 le polynôme constant égale à 1. À tout entier $k \geq 1$ on associe le polynôme P_k défini par*

$$P_k(x) = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-k-1)}{k!}.$$

1.
   (a) *Exprimer $P_k(n)$ à l'aide des coefficients binômiaux d'abord lorsque n est un entier positif, puis quand n est un entier négatif.*

   (b) *En déduire que $P_k(n)$ est toujours un entier.*
2. *Quels sont les polynômes à coefficients réels qui prennent toujours des valeurs entières quand la variable est entière (on écrira un tel polynôme Q comme une combinaison linéaire des P_k puis on exprimera les coefficients de la combinaison linéaire à l'aide de Q).*

Exercice 33 *Parmi les 76 termes obtenus en développant $(11+23)^{75}$ par la formule du binôme quel est le plus grand ? (On étudiera le quotient de deux termes consécutifs).*

Plus généralement, si α et β sont deux nombres réels vérifiant $0 < \alpha \leq \beta$ quel est le plus grand terme dans le développement de $(\alpha+\beta)^n$?

Exercice 34 *En déterminant le coefficiant de x^p dans $(x+y)^{n+m}$ et dans $(x+y)^n(x+y)^m$ démontrer l'égalité*

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + ... + C_n^p C_m^0 = C_{n+m}^p.$$

En déduire que

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 35 *Déterminer les entiers n pour lesquels C_n^p est impair quelque soit p.*

Chapitre 3

Algèbre de Boole

Definition 2 *Soit E un ensemble. Une opération binaire ou loi de composition interne sur E est une application*

$$* : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{array} \right. .$$

*Cette opération est dite **associative** si*

$$\forall (a, b, c) \in E^3,\ a * (b * c) = (a * b) * c$$

*Cette opération est dite **commutative** si*

$$\forall (a, b) \in E^2,\ a * b = b * a.$$

Exercice 36 *Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$. Dire dans les cas suivant si $*$ et associative ou commutative.*

1. $E = \mathbb{R} \quad * = +$
2. $E = \mathbb{R} \quad * = \hat{}$
3. $E = \mathbb{R} \quad * = \min$
4. $E = \mathbb{R} \quad * = -$
5. $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad * = \cap$
6. $E = \mathbb{R}^* \quad * = \div$

Definition 3 *Soit E un ensemble muni de deux lois internes $\sqcup$ et $\sqcap$. On dit que $\sqcup$ est distributive par rapport à $\sqcap$ si $\forall (a, b, c) \in E^3$,*

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

et

$$(b \sqcap c) \sqcup a = (b \sqcup a) \sqcap (c \sqcup a).$$

Exercice 37 *Soit E un ensemble muni de deux lois internes $\sqcup$ et $\sqcap$. Dire dans les cas suivant si $\sqcup$ est distributive par rapport à $\sqcap$:*

1. $E = \mathbb{R} \quad \sqcup = + \quad \sqcap = \times$
2. $E = \mathbb{R} \quad \sqcup = \times \quad \sqcap = +$
3. $E = \mathbb{R} \quad \sqcup = \times \quad \sqcap = \hat{}$

Definition 4 (À savoir par coeur) *Soit E un ensemble muni de deux lois internes $\sqcup$ et $\sqcap$ et d'une application de E dans E notée . On dit que $\left(E, \sqcup, \sqcap, \overline{\square}\right)$ est une algèbre de Boole si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\sqcup$ et $\sqcap$ sont associatives, commutatives et distributives l'une par rapport à l'autre.*

2. *Il existe deux éléments distincts* $\top$ *et* $\perp$ *tels que* $\forall a \in E$,

$$a \sqcap \top = a$$

$$a \sqcup \perp = a$$

$$a \sqcap \overline{a} = \perp$$

$$a \sqcup \overline{a} = \top$$

Remarque 1 *Très souvent, on note par abus*

$$\begin{array}{rcl} \sqcup & = & + \\ \sqcap & = & . \\ \perp & = & 0 \\ \top & = & 1\,. \end{array}$$

Dans ce cas, les relations du 2) deviennent

$$a.1 = a$$

$$a + 0 = a$$

$$a.\overline{a} = 0$$

$$a + \overline{a} = 1.$$

Il faut cependant se souvenir que ce ne sont que des notations qui ne représentent pas en général l'addition et la multiplication classique.

Exercice 38 *Soit* E *un ensemble, monter alors que* $\left(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, \overline{\square}\right)$ *a une structure d'algèbre de Boole.*

Exercice 39 *Soit* $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. *On définit sur cette ensemble deux opérations binaires associatives l'une par rapport à l'autre et décrite par les tableaux de vérité suivants :*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$.$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Monter que $\left(E, +, ., \overline{\square}\right)$ *a une structure d'algèbre de Boole.*

Proposition 3 *Dans une algèbre de Boole, tout résultat se présente sous deux formes duales.*
Soit P un résultat, son dual P s'obtient en permutant systématiquement :*
— *les symboles « + » et « . »*
— *les symboles* 0 *et* 1.
Si un résultat P est vrai dans une algèbre de Boole, il en est de même pour son dual.

Proposition 4 (À savoir par coeur) *Soit* $\left(E, +, ., \overline{\square}\right)$ *une algèbre de Boole alors*

1. $\overline{a}$ *est l'unique élément de* E *vérifiant*

$$a + \overline{a} = 1$$

$$a.\overline{a} = 0.$$

2. *Idempotence :* $\forall a \in E$,
$$a + a = a$$
$$a.a = a.$$
3. *On a*
$$\overline{0} = 1$$
et
$$\overline{1} = 0.$$
4. $\forall a \in E$,
$$\overline{\overline{a}} = a.$$
5. *Absorption :* $\forall (a, b) \in E^2$,
$$a + (ab) = a$$
et
$$a.(a + b) = a$$
6. *Redondance :* $\forall (x, y, z) \in E^3$,
$$ax + y = ax + y + xy$$
7. *Loi de De Morgan :* $\forall (a, b) \in E^2$,
$$\overline{a + b} = \overline{a}.\overline{b}.$$

Exercice 40 *Soit* $(E, +, ., \overline{\square})$ *une algèbre de Boole et soient* $a,\ b,\ c,\ d$ *des éléments de* E*. Prouver les égalités suivantes et écrire leur duales.*

1. $a + \overline{a.b} = 1.$
2. $\overline{ab + \overline{a} + \overline{b}} = 0.$
3. $abc + ab\overline{c} + a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} = a.$
4. $a + c = a + \overline{a}\overline{b}c(ad + c) + bc.$
5. $(a + b)(a + c) = a + bc.$
6. $\overline{(a + b)(b + c)} + \overline{(c + d)(d + a)} = \overline{ac + bd}.$
7. $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) = ac + bd.$

Exercice 41 *Soit* $(E, +, ., \overline{\square})$ *une algèbre de Boole et soient* $a,\ b,\ c,\ d$ *des éléments de* E*. Dire si les égalités suivantes sont vérifiées*

1. $\overline{a} + ab = \overline{a} + b.$
2. $(a + b)(\overline{a} + \overline{c}) = (a + \overline{c})(\overline{a} + b).$
3. $a + bc = (a + b + \overline{c})\left(a + \overline{b} + c\right)(a + b + c).$
4. $ac + \overline{a}c = ab + \overline{a}c + bc.$

Exercice 42 *Soient* a *et* b *des éléments d'une algèbre de Boole* $(E, +, ., \overline{\square})$*, prouver les égalités suivantes :*

1. $(a + b)(a + c) = a + bc$
2. $a + b = a + \overline{a}b.$

Exercice 43 *Soient* $a,\ b,\ c$ *des éléments d'une algèbre de Boole* $(B,+,.,\overline{\square})$ *et* $e = abc + \overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}$ *.*

1. *Ecrire* $a.b$ *en n'utilisant que les opérations addition et complémentation*
2. *Ecrire* $a + b$ *en n'utilisant que les opérations produit et complémentation*
3. *Ecrire* e *en n'utilisant que les opérations addition et complémentation*
4. *Ecrire* e *en n'utilisant que les opérations produit et complémentation.*

Exercice 44 *Soient* a *et* b *des éléments d'une algèbre de Boole* $(E,+,.,\overline{\square})$*, prouver les implications suivantes et examiner leur réciproques :*

1. $ab = 1 \Rightarrow a = 1$ *et* $b = 1$.
2. $ab + \overline{c} = 0 \Rightarrow \overline{a}c + \overline{b}c = 1$.
3. $a = b + c \Rightarrow \overline{a} = \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.
4. $a + b = a + c \Rightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}\overline{b} = \overline{a}\overline{c}$.
5. $ab + bc + ca = \overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a \Rightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}\overline{b} = \overline{a}\overline{c}$.

Exercice 45 *Soit* $(E,+,.,\overline{\square})$ *une algèbre de Boole. On définit l'opération binaire* $\oplus$ *(dite de disjonction exclusive) sur cette algèbre par :*

$$\forall\,(a,b) \in E^2, \qquad a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}b.$$

1. *Si l'algèbre de Boole est* $\left(\mathbb{B},\ +,\ .,\ \overline{\square}\right)$ *, déterminer la table de vérité de cette opération.*
2. *Déterminer l'opération duale.*
3. *Reprendre les question* 1 *et* 2 *pour les opérations binaires définies par*

$$\forall\,(a,b) \in E^2, \qquad a\,\mathrm{NOR}\,b = \overline{a+b}.$$

et

$$\forall\,(a,b) \in E^2, \qquad a\,\mathrm{NAND}\,b = \overline{ab}.$$

4. *Montrer que* $\forall a \in E$,

— $a\,\mathrm{NOR}\,0 = \overline{a}$ — $a\,\mathrm{NAND}\,a = \overline{a}$ — $a\,\mathrm{NOR}\,\overline{a} = 0$
— $a\,\mathrm{NOR}\,a = \overline{a}$ — $a\,\mathrm{NAND}\,1 = \overline{a}$ — $a\,\mathrm{NAND}\,\overline{a} = 1$

On représente souvent ces fonctions par des portes logiques :

Exercice 46 *Déterminer la valeur de sortie du circuit suivant :*

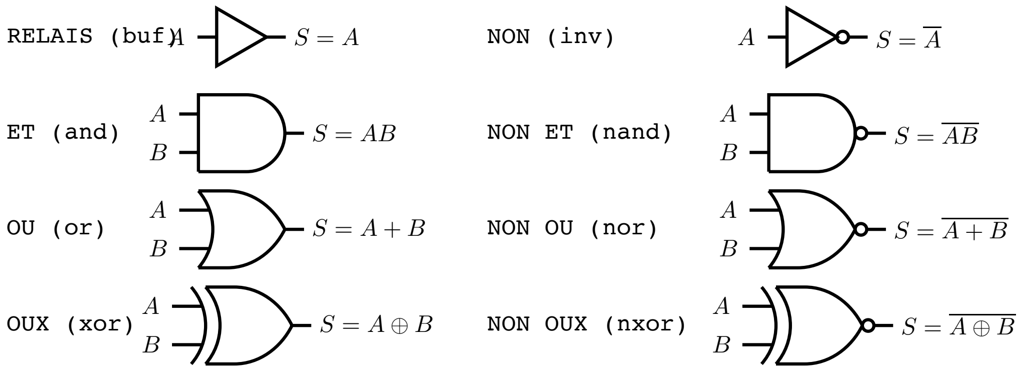
Exercice 47 *Construire un circuit représentant les expresions Booléennes suivantes :*
— $\overline{a}b + \overline{c}$.
— $(a+b)\,(\overline{a}+c) + \overline{a}b$.
— $\left(\overline{a}\overline{b} + a\right)(ab + \overline{c})$.
— $\overline{a}b + \overline{a}c + \overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

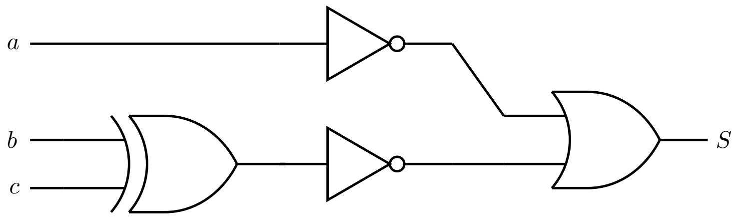
Definition 5 *Soit* $(E,+,.,\overline{\square})$ *une algèbre de Boole. Une fonction Booléenne en* n *variables est une combinaison de ces variables au moyen des opérations «+» , « . » et «*$\overline{\square}$*» .*

Example 1 *L'application*

$$f : \begin{cases} E^3 & \to & E \\ (a,b,c) & \mapsto & \overline{a}b + c \end{cases}$$

est une fonction Booléenne en trois variables.





Remarque 2 *Très souvent, nous utiliserons les fonctions Booléennes sur* $\left(\mathbb{B}, +, ., \overline{\square}\right)$.

Exercice 48 *Déterminer la table de vérité de la fonction Booléenne f définie par*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^3 & \to & \mathbb{B} \\ (a,b,c) & \mapsto & \overline{a}b + c \end{array} \right.$$

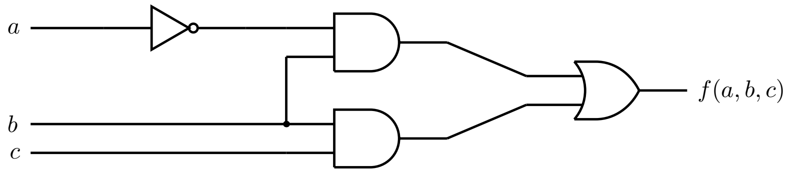
Exercice 49 *Déterminer la table de vérité de la fonction Booléenne f définie par*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^3 & \to & \mathbb{B} \\ (a,b,c) & \mapsto & (\overline{a} + b)\, c \end{array} \right.$$

Exercice 50 *Déterminer la table de vérité de la fonction Booléenne f définie par*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^3 & \to & \mathbb{B} \\ (a,b) & \mapsto & a\overline{b} + \overline{a}b \end{array} \right. .$$

Exercice 51 *Déterminer la fonction Booléenne sur* $\left(\mathbb{B}, +, ., \overline{\square}\right)$ *associée au circuit suivant :*



Definition 6 *Soit* $(E, +, ., \overline{\square})$ *une algèbre de Boole. On appelle minterme (respectivement maxterme) de* n *variables, un produit booléen (respectivement une somme booléenne) de ces* n *variables ou de leur complémentaire.*

Remarque 3 *Les mintermes en* n *variables sur* $\mathbb{B}$ *sont les fonctions Booléennes valant* 1 *sur un mot binaire de* $\mathbb{B}^n$ *et* 0 *sur les autres.*

Les maxtermes en n *variables sur* $\mathbb{B}$ *sont les fonctions Booléennes valant* 0 *sur un mot binaire de* $\mathbb{B}^n$ *et* 1 *sur les autres.*

Exercice 52 *Déterminer les tables de vérités des mintermes ou maxtermes en trois variables définis sur* $\mathbb{B}^3$ *suivants :*

— $x\overline{y}z$

— $x + \overline{y} + z$

— $\overline{x}y\overline{z}$

— $x + y + z$.

Exercice 53 *Déterminer le nombre de mintermes et de maxtermes définis sur* $\mathbb{B}^n$.

Remarque 4 *A tout minterme (resp. maxterme) en* n *variables on peut associer un nombre binaire unique en* n *variable. En effet, au minterme* $x_1x_2...x_n$ *on peut associer* $b_1b_2...b_n$ *tel que pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$,

$$b_i = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & x_i = a_i \\ 0 & si & x_i = \overline{a_i} \end{array} \right. .$$

Ce mot binaire permet d'indexer en base 10 *les mintermes (resp. maxtermes).*

Exercice 54 *Donner l'indice des mintermes et maxtermes suivants :*

— $x\overline{y}z$

— $x + \overline{y} + z$

— $\overline{x}y\overline{z}$

— $x + y + z$

— $x\overline{y}zt$

— $\overline{xyz}t$

— $x_1\overline{x_2x_3x_4}x_5$

— $\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3} + x_4 + \overline{x_5} + \overline{x_6} + \overline{x_7}$

Exercice 55 *On note* m_i *(resp* M_i *) le minterme (resp maxterme) d'indice* i *(dont il faut bien sûr préciser le nombre de variables).*

1. *Déterminer le minterme de* 5 *variables* m_{21}.
2. *Le complémentaire de* m_{21} *est un maxterme.*
   - *(a) Déterminer ce maxterme.*
   - *(b) Déterminer son indice.*

3. *Soit m_{i_0} le minterme de n variables d'indice $i_0 \in \{0,\ 2^n - 1\}$.*
   Déterminer l'indice du maxterme $\overline{m_{i_0}}$.

Exercice 56 *Montrer que la somme de tous les mintermes pour un nombre de variables données est* 1.

Exercice 57 *Montrer que le produit de tous les maxtermes pour un nombre de variables données est* 0.

Exercice 58 *Montrer que le produit de deux mintermes d'indices différents pour un nombre de variables données est* 0.

Exercice 59 *Montrer que la somme de deux maxtermes d'indices différents pour un nombre de variables données est* 1.

Remarque 5 *Deux sommes de mintermes sont égales si et seulement si les mintermes qui ne sont pas communs aux 2 sommes sont nuls.*

De même 2 produits de maxtermes sont égaux si et seulement si les maxtermes qui ne sont pas communs aux 2 produits valent 1.

Theorem 7 *Toute fonction booléenne s'écrit de manière unique comme somme de mintermes tous distincts. La fonction nulle est la somme de 0 mintermes. Cette forme est appelée* ***forme canonique disjonctive****.*

Example 2 *Considérons l'application*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & E \\ (a,b) & \mapsto & a\left(a+\overline{b}\right)+\overline{a}b \end{array} \right.$$

Pour tout $(a,b) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned} f(a,b) &= a\left(a+\overline{b}\right)+\overline{a}b \\ &= a+\overline{a}b \\ &= a\overline{b}+ab+\overline{a}b. \end{aligned}$$

On peut voir cela de manière plus simple en regardant la table de vérité de f

$\mathbb{B}^2$		f	m_2	m_1	m_3
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1

En fait, $f = m_1 + m_2 + m_3$.

Theorem 8 *Toute fonction booléenne s'écrit de manière unique comme produit de maxtermes tous distincts. La fonction 1 est le produit de 0 maxtermes. Il s'agit de la* ***forme canonique conjonctive***

Exercice 60 *Déterminer les tables de vérité, les formes canoniques disjonctives et conjonctives des fonctions booléennes suivantes.*

1. $xy + \overline{x}z$.
2. $x\left(y + \overline{x}\right) + z$
3. $xy + yz + zx$
4. $xyz + \overline{xz}$
5. $x\overline{y} + y\overline{z} + z\overline{x}$
6. $(x + yz)\left(\overline{x} + \overline{b}\overline{c}\right)$
7. $x\left(y + xz\right) + \overline{z}$
8. $(x + yz)(y + zx)(z + xy)$.

Exercice 61 *Donner une fonction Booléenne ayant la table de vérité suivante :*

Indexation	$\mathbb{B}^3$			f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

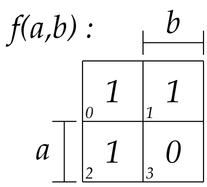
Si on procède par somme de minterme dans l'exercice précédent, on constate que la forme obtenue n'est pas la plus simple. Pour simplifier ces expressions on peut, lorsque le nombre de variable n'excède pas 6, utiliser le procédé de Karnaugh décrit ci-dessous.

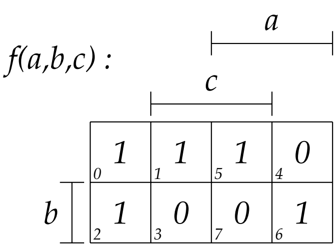
On fait un tableau dans lequel chaque case du tableau représente un minterme, et deux cases voisines dans le tableau représentent deux mintermes qui ne diffèrent que par une variable.

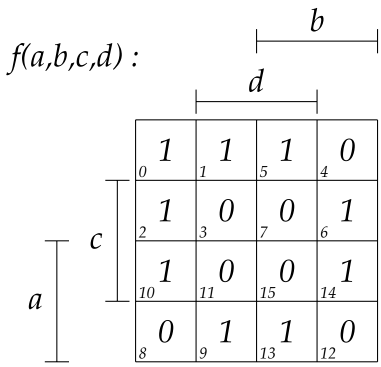
Utilisation du tableau pour la simplification d'une fonction f :

1. On écrit f sous forme canonique disjonctive, pour remplir le tableau de Karnaugh (on met des 1 dans les cases des mintermes apparaissant dans l'écriture de f et éventuellement des 0 ailleurs).
2. On regroupe les cases adjacentes où il y a des 1 par bloc le plus grand possible, mais le nombre de cases doit être une puissance de 2.

Example 3 *Pour un nombre de variable allant de 2 à 4, voici quelques exemples de tableaux de Karnaugh :*





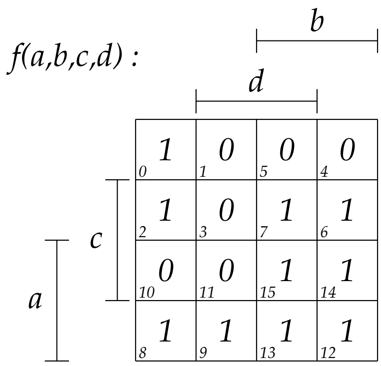


Example 4 *On considère la fonction Booléenne f definie sur une algèbre de Boole $(E,+,.,\overline{\square})$ par*

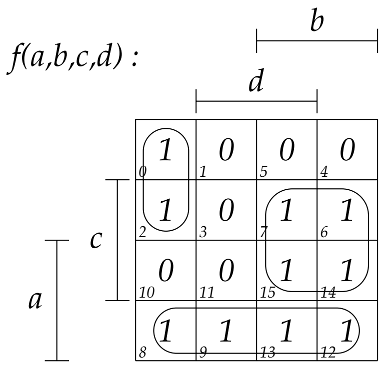
$$f(a,b,c,d)=\overline{a}c+\overline{a}\overline{bd}+abc+ab\overline{c}+a\overline{c}+\overline{b}\overline{c}\overline{d}.$$

Après calcul, on peut constater que pout tout $(a,b,c,d)\in E^4$,

$$f(a,b,c,d)=abcb+\overline{a}bcd+ab\overline{c}d+abc\overline{d}+\overline{a}\overline{b}cd+a\overline{b}\overline{c}d+\overline{a}bc\overline{d}+ab\overline{c}\overline{d}+\overline{a}\overline{b}c\overline{d}+a\overline{b}\overline{c}\overline{d}+\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$$



En regroupant les termes on a



Ainsi

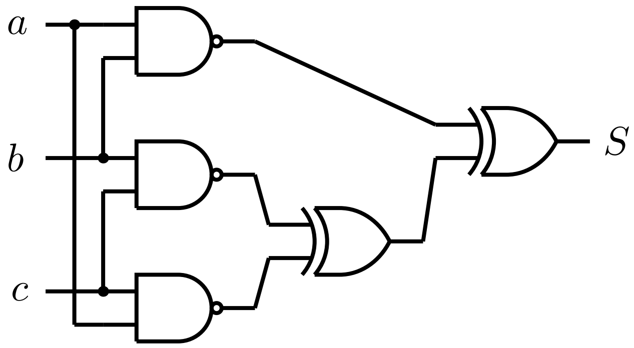
$$f(a,b,c,d)=bc+a\overline{c}+\overline{bd}\overline{a}+bc.$$

Exercice 62 *Simplifier les fonctions Booléennes suivantes :*

1. $ab+a\overline{c}+bc$
2. $\overline{a}+\left(\overline{c}+a+\overline{b}c\right)(c+\overline{a}b)$
3. $(ab+\overline{c})\left(\overline{b}+\overline{a}c+\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right)$

4. $\overline{c}\left(a\overline{b}+bd\right)+b\left(a\overline{c}+\overline{a}c\right)$
5. $abc+a\overline{b}\overline{c}+\overline{a}b\overline{c}+\overline{a}\overline{b}c+\overline{a}bc+a\overline{b}\overline{c}$.

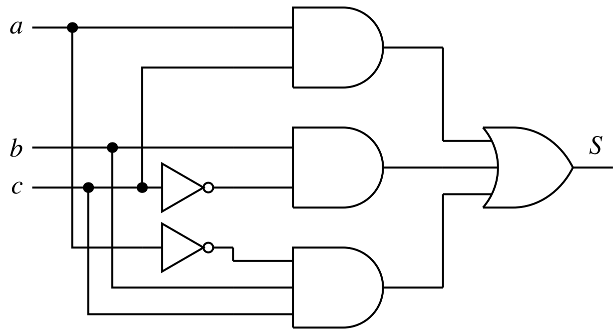
Exercice 63 *Écrire la fonction Booléenne associée au circuit suivant, simplifier cette fonction et réaliser le circuit simplifié.*



Exercice 64 *Simplifier les fonctions Booléennes suivantes :*

1. $\overline{c}\left(a\overline{b}+bd\right)+b\left(a\overline{c}+\overline{a}c\right)$.
2. $(a+d)(a+c)(b+d)(b+c)$.
3. $db(b+c)+\overline{c}(a+b)+ab\overline{c}$.
4. $abcd+\overline{a}\overline{b}+a\overline{c}d+b\overline{c}\overline{d}$.

Exercice 65 *Écrire la fonction Booléenne associée au circuit suivant, simplifier cette fonction et réaliser le circuit simplifié.*



Chapitre 4

Logique

Definition 9 *On appelle proposition une assertion qui est soit vraie soit fausse. On associera la valeur* 0 *à une proposition fausse et la valeur* 1 *à une proposition vraie.*

A partir de cela,on peut définir des connecteurs logiques

— ***Le connecteur unaire de négation :***
Il a la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
0	1
1	0

Soit p : *"L'équipe de football de Lens a gagné" alors* $\neg p$: *"L'équipe de football de Lens n'a pas gagné" (attention cette assertion comprend la défaite et le match nul).*

— ***Le connecteur binaire "et" :***
Il a la table de vérité suivante :

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Soit p : *"L'équipe de football de Lens a gagné" et* q : *"L'équipe de football de Lille a gagné" alors*

$p \wedge q$: *"Les équipes de football de Lens et de Lille ont gagné"*

— ***Le connecteur binaire "ou" :***
Il a la table de vérité suivante :

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Soit p : *"L'équipe de football de Lens a gagné" et* q : *"L'équipe de football de Lille a gagné" alors*

$p \vee q$: *"L'équipes de football de Lens a gagné ou l'équipe de football de Lille a gagné"*

Il s'agit d'une réécriture des relations binaires de l'algèbre de Boole $\left(\mathbb{B}, +, ., \overline{\square}\right)$. Les règles de calcul sont les mêmes.

Par exemple :

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) .$$

Exercice 66 *Déterminer le nombre de connecteurs logiques binaires pour les propositions.*

Exercice 67 *Donner les tables de vérité de opérateur trinaires suivants :*

1. $p \wedge (q \vee r)$.
2. $(p \wedge q) \vee r$.
3. $p \wedge q \wedge r$.

Exercice 68 *Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :*

1. (*5 est un entier positif*) $\vee (2 < 3)$.
2. (*5 est un entier positif*) $\vee (2 \geq 3)$.
3. $(3 > 2) \wedge (2 + 3 = 4)$.
4. $(3 \leq 2) \wedge (3 > 2)$.

Exercice 69 *On définit l'opérateur binaire* $\Rightarrow$ *par*

$$p \Rightarrow q$$

signifie

$$\neg p \vee q.$$

1. *Déterminer la table de vérité de l'opérateur* $\Rightarrow$.
2. *Dire si les propositions suivantes sont vraies ou non.*
   (a) $(3 < 2) \Rightarrow (3 > 2)$.
   (b) $(2 + 3 = 5) \Rightarrow (2 + 3 = 6)$
   (c) $(\pi = 3) \Rightarrow \pi$ *est un nombre transcendant.*
3. *Comparer les tables de vérité de opérateur* $\Rightarrow$ *et de l'opérateur de contraposée qui à* p *et* q *deux propositions associe* $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Exercice 70 *On définit l'opérateur binaire (dit de disjonction exclusive)* $\oplus$ *par*

$$p \oplus q$$

signifie

$$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) .$$

1. *Déterminer la table de vérité de l'opérateur* $\oplus$.
2. *Justifier le nom de cette opérateur.*

Exercice 71 *Quelle est la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :*

1. (*5 est un entier positif*) $\vee (2 < 3)$.
2. (*5 est un entier positif*) $\vee (2 \geq 3)$.
3. $(2 + 3 = 5) \oplus (2 + 3 = 6)$.

Exercice 72 *On définit l'opérateur binaire (dit d'équivalence)* $\Longleftrightarrow$ *par*

$$p \Longleftrightarrow q$$

signifie

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

1. *Simplifier l'expression donnée.*
2. *Donner la table de vérité de* $\Longleftrightarrow$.

Exercice 73 *Soient* $p,\ q,\ r$ *des propositions. Construisez la table de vérité de chacune des propositions composées suivantes :*

1. $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.
2. $(p \vee q) \Rightarrow r$.
3. $q \wedge (\neg q \wedge p)$.
4. $(p \oplus q) \Longleftrightarrow \neg (p \Longleftrightarrow q)$.

Definition 10 *On appelle tautologie une proposition composée dont la valeur de vérité est* 1, *quelles que soient les valeurs de ses variables propositionnelles.*

Definition 11 *On appelle contradiction une proposition composée dont la valeur de vérité est* 0, *quelles que soient les valeurs de ses variables propositionnelles.*

Exercice 74 *Montrer que les propositions suivantes sont des tautologies.*

1. $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$.
2. $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow p)$.
3. $\neg (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \neg q)$.
4. $(p \Rightarrow (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow r)$.
5. $(p \vee q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.
6. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

Exercice 75 (Règles d'inférences) *Montrer que les propositions suivantes sont des tautologies.*
— $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.
— $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.
— $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.
— $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
— $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \Rightarrow q \vee r$.

Definition 12 — *Ces règles fournissent des canevas généraux de raisonnement et sont appelées* ***règles d'inférences****.*

Remarque 6 *Le troisième point résume ce qu'on appelle le raisonement par l'absurde.*
Le cinquième point permet d'envisager plusieurs cas dans une preuve.
Les autres points sont indispensables.

Exercice 76 (Conjonction de clauses équivalentes) *Écrire les propositions suivantes en éliminant les connecteurs non fondamentaux (* $\Longleftrightarrow,\ \oplus,\ \Rightarrow$ *).*

1. $(p \vee q) \Longleftrightarrow (\neg t \wedge r)$.
2. $(p \oplus q) \Rightarrow \neg (\neg q \Rightarrow r)$.

Exercice 77 *Prouver que la formule suivante est une tautologie, en mettant en évidence les règles d'inférence utilisées*

$$(p \wedge q \Rightarrow r) \Longleftrightarrow (\neg r \wedge p \Rightarrow \neg q) .$$

Exercice 78 *Un homme qui semble divaguer déclare à toute la clientèle d'un café :*

1. *Le jour où je ne bois pas et où je dors, je ne suis pas content.*
2. *Le jour où je bois, je ne suis pas content et je dors.*
3. *Le jour où je ne mange pas, ou bien je ne suis pas content, ou bien je dors, ou les deux.*
4. *Le jour où je mange, ou bien je suis content, ou bien je bois, ou les deux.*
5. *Le jour où il ne pleut pas et où je suis content, je ne mange pas.*
6. *Aujourd'hui, je suis content.*
   A-t-il bu ? mangé ? dormi ? Quel temps fait-il ?

(on définira cinq variables booléennes a : "il mange" b : "il boit" etc....., et on traduira chacune des affirmations par une équation booléenne.)

Exercice 79 *Dans chacun des cas suivants déterminer si la première forme a pour conséquence l forme qui est sur la même ligne :*

1. $p \wedge q \quad p.$
2. $q \quad p \Rightarrow q.$
3. $\neg (p \Rightarrow q) \quad p.$
4. $(p \wedge q) \vee r \quad p \wedge (q \vee r)\,.$
5. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\,.$
6. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad p \Rightarrow r.$
7. $p \Rightarrow (q \wedge r) \quad p \Rightarrow q.$
8. $(p \wedge q) \Rightarrow r \quad (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\,.$
9. $p \Rightarrow (q \vee r) \quad (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\,.$

Exercice 80 *La formes propositionnelle f étant fixée, que peut-on dire d'une forme propositionnelle g qui possède chacune des deux proporiétés :*

$f \vee g$ est une tautologie $\qquad f \wedge g$ est une contradiction.

Exercice 81 *Si C_1 et C_2 désignent des classes de formes propositionnelles on pose :*

$$C_1 \downarrow C_2 = (\neg C_1) \wedge (\neg C_2)\,.$$

1. *Exprimer $(\neg C)\,,\ C_1 \wedge C_2,\ C_1 \vee C_2$ en utilisant que le connecteur $\downarrow$.*
2. *Y a-t-il d'autres connecteurs qui permettent comme celui-ci d'exprimer toutes les connections ?*

Exercice 82 *Trouver des formules permettant d'exprimer plus simplement les sommes :*

1. $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1)$
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$
3. $1 + x + x^2 + ... + x^n$
4. $x + x^3 + x^5 + ... + x^{2n-1}$
5. $x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n.$

Definition 13 *Un prédicat est une proposition faisant mention d'un ou de plusieurs objets anonymes $x,\ y,\ z$ etc...*

"$\forall x$" se lit "quelque soit x" et $\forall$ est appelé quantificateur universel.

"$\exists x$" se lit "il existe x" et $\exists$ est appelé quantificateur existentiel.

Proposition 5 *On a*

$$\neg\left(\forall x\ p\left(x\right)\right) \Longleftrightarrow \exists x\ \neg p\left(x\right)$$
$$\neg\left(\exists x\ p\left(x\right)\right) \Longleftrightarrow \forall x\ \neg p\left(x\right).$$

Exercice 83 *Formaliser les propositions suivantes, en utilisant uniquement les prédicats indiqués, les connecteurs et quantificateurs :*

1. *Personne n'est parfait. (Utiliser $p\left(x\right)$: " x est parfait").*
2. *0 est multiple de chaque nombre entier. ($m\left(x,y\right)$: "x est multiple de y" ; $e\left(x\right)$: "x est un entier").*
3. *Les absents n'ont pas tous tort. ($a\left(x\right)$: "x est absent" ; $t\left(x\right)$: " x a tort").*

Exercice 84 *Écrire la négation des formules suivantes :*

1. $\forall x\ \ \left(p\left(x\right)\Rightarrow q\left(x\right)\right).$
2. $\exists x\ \ \left(p\left(x\right)\wedge q\left(x\right)\right).$
3. $\forall x\ \ \left(p\left(x\right)\Longleftrightarrow q\left(x\right)\right).$
4. $\exists x\ \forall y\ \ \left(q\left(x,y\right)\Rightarrow p\left(x,y\right)\vee r\left(x,y\right)\right).$

Exercice 85 *Quelle est la valeur de vérité de la formule :* $\forall x\in\mathbb{Z}\ \ \left(x\neq x^{2}\right)$?

Exercice 86 *Écrivez la négation des formules suivantes :*

1. $\forall x\ \exists y\ \ \left(p\left(x,y\right)\Rightarrow q\left(x,y\right)\right).$
2. $\forall x\ \ \left(\exists y\ p\left(x,y\right)\Rightarrow r\left(y\right)\right).$
3. $\forall x\ \exists y\ p\left(x,y\right)\Rightarrow\forall z\ r\left(z\right).$
4. $\forall x\ \ \left(r\left(x\right)\Rightarrow\exists y\ p\left(x,y\right)\right).$

Exercice 87 *Soient les prédicats : $cur\acute{e}\left(x\right)$ (x est un curé), $v\acute{e}lo\left(y\right)$ (y est un vélo), $poss\grave{e}de\left(x,y\right)$ (x possède y). Traduisez en langage courant les formules quantifiées :*

1. $\forall x\ \ \left(v\acute{e}lo\left(x\right)\Rightarrow\exists z\ \ \left(cur\acute{e}\left(z\right)\wedge poss\grave{e}de\left(z,x\right)\right)\right).$
2. $\forall x\ \ \left(cur\acute{e}\left(x\right)\Rightarrow\ \forall y\ \forall z\ \ \left(v\acute{e}lo\left(z\right)\wedge v\acute{e}lo\left(y\right)\wedge\left(z\neq y\right)\Rightarrow\ \neg poss\grave{e}de\left(x,z\right)\vee\neg poss\grave{e}de\left(x,y\right)\right)\right).$
3. $\exists x\ \left(cur\acute{e}\left(x\right)\wedge\ \forall y\ \ \left(v\acute{e}lo\left(y\right)\Rightarrow\ \neg poss\grave{e}de\left(x,y\right)\right)\right)$

Exercice 88 *Soient A et B deux parties de $\mathbb{N}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :*

1. *A est non vide.*
2. *A est différent de $\mathbb{N}$.*
3. *5 est le plus petit élément de A.*
4. *Tous les éléments de A sont impairs.*
5. *Tous les éléments de A ne sont pas pairs.*
6. *A est inclus dans B.*

7. *A et B sont disjoints.*
8. *Tous les éléments de B sont divisibles par 4.*

Exercice 89 *Écrire la négation des propositions suivantes :*

1. $\forall x \in E,\ x \geq 3.$
2. $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ y = f(x).$
3. $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ y \neq f(x).$

Exercice 90 *Afin de définir des nombres $x_0, x_1, ...,\ x_n, ...$, on se donne arbitrairement x_0 et on pose*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 3}{x_n - 1}.$$

Démontrer par récurrence que :

$$x_n = \frac{\alpha x_0 \left(3^n + (-1)^n\right) + \beta \left(3^n - (-1)^n\right)}{x_0 \left(3^n - (-1)^n\right) + \gamma \left(3^n + (-1)^n\right)}$$

avec des coefficients $\alpha,\ \beta$ et γ que l'on déterminera.

Exercice 91 *Les nombres de Fibonacci $F_1,\ F_2,\ ...,\ F_n,\ ...$ sont les nombres entiers définis par les conditions suivantes :*

$$F_0 = 1 \qquad F_1 = 1$$

$$\forall n \geq 2, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

1. *Calculer F_6 et F_{12}.*
2. *Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. À quoi est égale la somme $F_0 + F_1 + ... + F_n$?*

Chapitre 5

Relations

Definition 14 *Soit A et B deux ensembles. Une relation $\mathcal{R}$ sur $A \times B$ est un sous-ensemble de $A \times B$.*

On dit que $a \in A$ et $b \in B$ sont en relations si $(a, b) \in \mathcal{R}$.

Si deux éléments $a \in A$ et $b \in B$, sont en relation pour $\mathcal{R}$, on note $a\mathcal{R}b$.

Remarque 7 *Très souvent, l'ensemble $\mathcal{R}$ est défini à l'aide de prédicats. Dans ce cas, on définit la relation avec le prédicat.*

Par exemple, pour définir sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = 3\}$ on dira :

La relation $\mathcal{R}$ est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a + b = 3.$$

Exercice 92 *Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) définie par*

$$a\mathcal{R}b \iff a - b \geq 0.$$

1. *Donner deux éléments en relation.*
2. *Si $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$ alors que peut-t-on affirmer ?*
3. *Comment note-t-on $\mathcal{R}$ habituellement ?*

Exercice 93 *Sur l'ensemble des mots de la langue française on définit la relation : ‹‹le mot M est lié au mot N s'ils coïncident après qu'on ait retourné l'ordre des lettres de M››.*

Déterminer quelques couples de mots en relation ainsi que des mots en relation avec eux-mêmes.

Exercice 94 *Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs on définit deux relations, notées respectivement Σ et Δ, de la façon suivante :*

$$x\Sigma y \text{ quand la somme } x + y \text{ est paire}$$

$$x\Delta y \text{ quand la différence } x - y \text{ est paire.}$$

Ces relations sont-elles égales ?

Definition 15 *Soient A et B deux ensembles et $\mathcal{R}$ une relation sur $A \times B$.*

1. *On appelle **diagramme sagittal** de $\mathcal{R}$ le diagramme construit de la manière suivante :*
   — *Les sommets du diagramme sont les éléments de A et ed B.*
   — *Si $a \in A$ est en relation avec $b \in B$ alors on trace une flèche de a à b.*
2. *On appelle **diagramme cartésien de** $\mathcal{R}$ le diagramme cartésien de $A \times B$ pour lequel on noircit les cases représantant des couples en relation.*

3. *On appelle* ***matrice*** *de $\mathcal{R}$ un tableau repéré par les éléments de A et de B constitué de bits et dont les coefficients représentant des couples en relation sont des 1 et les autres des 0.*

Exercice 95 *Soient $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ des chiffres et $B = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$ des voyelles. Un élément de A est dit en relation avec un élément de B pour la relation $\mathcal{R}$ si la voyelle est utilisée pour écrire le nom du chiffre en toutes lettres.*

1. *Donner deux couples d'éléments en relation pour $\mathcal{R}$.*
2. *Donner le diagramme sagittale, le diagramme cartésien et la matrice de $\mathcal{R}$.*

Exercice 96 *Soient $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ et $\mathcal{R} = \leq$.*
Donner le diagramme sagittale, le diagramme cartésien et la matrice de $\mathcal{R}$.

Definition 16 *Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire (ne portant que sur 2 éléments) sur A.*
On dit que $\mathcal{R}$ est
— ***Réflexive*** *si*
$$\forall a \in A,\ a\mathcal{R}a.$$
— ***Symétrique*** *si*
$$\forall (a,b) \in A^2,\ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$$
— ***Antisymétrique*** *si*
$$\forall (a,b) \in A^2,\ (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$$
— ***Transitive*** *si*
$$\forall (a,b,c) \in A^3,\ (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$$

Definition 17 *Soit A un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur A.*
— *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.*
— *$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exercice 97 *Montrer que "$=$" est ou relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 98 *Montrer que "$\leq$" est ou relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 99 *Les relations suivantes sont-elles réflexives symétriques ou transitives ?*

1. *$A = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow |x| = |y|$.*
2. *$A = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 y = 1$.*
3. *$A = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $y = px^q$.*

Exercice 100 *Soit E l'ensemble des diviseurs de 100 et*

$\mathcal{R} = \{(1,2)\,;(1,5)\,;(2,4)\,;(4,20)\,;(2,10)\,;(5,10)\,;(5,25)\,;(10,20)\,;(10,50)\,;(20,100)\,;(25,50)\,;(50,100)\}.$

1. *Donner le graphe de $\mathcal{R}$.*
2. *On va réorganiser le graphe de $\mathcal{R}$ en appliquant la numérotation topologique :*
Si $x\mathcal{R}y$, on dit que x est un antécédent de y (ou que y est un successeur de x). On définit, si possible, les ensembles suivants :
$$S_0 = \{x \in E,\ x \text{ n'a pas d'antécédent dans } E\}$$
$$S_1 = \{x \in E,\ \text{tous les antécédents de } x \text{ sont dans } S_0\}$$
etc...
$$S_n = \{x \in E,\ \text{tous les antécédents de } x \text{ sont dans } S_k,\ \text{avec } k < n\}$$
Déterminer la numérotation topologique de $\mathcal{R}$ si elle existe et redessiner le graphe de $\mathcal{R}$ en respectant cette numérotation topologique.

Exercice 101 *Sur l'ensemble*

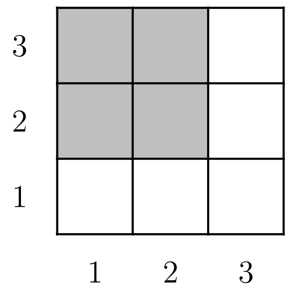
$$E = \{\textit{entiers naturels pairs inférieurs à } 21\}$$

on définit :

$$x\mathcal{R}y \iff x \textit{ est un multiple de } y.$$

1. *Donner la représentation cartésienne de cette relation.*
2. *Montrer que cette relation est une relation d'ordre.*

Exercice 102 *La relation binaire sur* $\{1,\ 2,\ 3\}$ *définie par le diagramme cartésien ci-dessous est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?*



Definition 18 *Soient* E *un ensemble et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur cet ensemble.*
Soit $(a, b) \in E^2$. *On dit que* a *et* b *sont en relation si* $a\mathcal{R}b$.
On appelle classe d'équivalence de a *l'ensemble des éléments de* E *en relation avec* a.
On appelle ensemble quotient et on note $E/\mathcal{R}$ *l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de* E.

Exercice 103 *Soient* $E = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ *et* $\mathcal{R}$ *la relation sur* E *définie par*

$$a\mathcal{R}b \iff 6|\,(b-a)\,.$$

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur* E.
2. *Construire le diagramme cartésien de* $\mathcal{R}$.
3. *Déterminer les classes d'équivalence de* E *pour la relation* $\mathcal{R}$.

Proposition 6 *Soient* E *un ensemble et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur cet ensemble alors les classes d'équivalence de* E *pour* $\mathcal{R}$ *forment une partition de* E.

Exercice 104 *On définit sur* $\mathbb{Z}$ *la relation* $\mathcal{R}$ *définie par*

$$a\mathcal{R}b \iff a+b \textit{ est pair.}$$

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer les classes d'équivalence de* E *pour* $\mathcal{R}$.

Exercice 105 *On définit une relation sur l'ensemble des mots de la langue française de la façon suivante : ‹‹le mot* M *est lié au mot* N *si* N *est un anagramme de* M. *››.*

1. *Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer la classe d'équivalence du mot ‹‹ chien ››.*

Exercice 106 *Sur l'ensemble des triangles, on définit la relation $\mathcal{R}$ par : ‹‹ deux triangles sont en relation si ils ont un côté de même longueur ››.*

S'agit-il d'une relation d'équivalence ?

Definition 19 *Un ensemble muni d'une relation d'ordre est appelé ensemble ordonné.*

Definition 20 *Soit $(E_1, \leq_1)$ et $(E_2, \leq_2)$ deux ensembles ordonnés. On peut définir une relation d'ordre sur $E_1 \times E_2$ de la manière suivante*

$$(x, y) \leq (x', y') \Longleftrightarrow x \leq_1 x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq_2 y')\,.$$

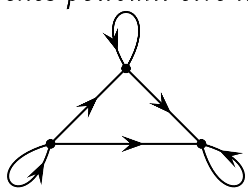
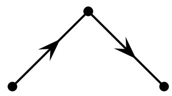
Cet ordre s'appelle l'ordre lexicographique. On peut bien sûr généraliser cette méthode à un nombre quelconque d'un ensembles ordonnés.

Exercice 107 *Ordonner suivant l'ordre lexicographique les mots binaires suivants :*

$$00101011 \quad 110100 \quad 111 \quad 10101010 \quad 010101111 \quad 00101010101.$$

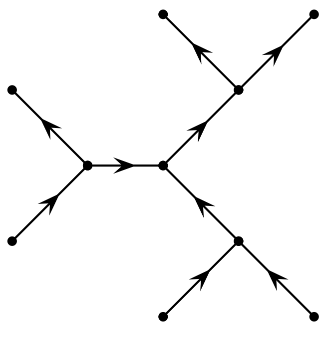
Definition 21 *Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $(x, y) \in E^2$ tels que $x \leq y$. On dit alors que x **minore** y (ou est un minorant de) et que y **majore** (ou est un majorant de) x.*

- *Un élément est dit **minimal** (resp. **maximal**) si il n'a pas d'élément qui le minore (resp. qui le majore)*
- *Un élément est **le plus petit élément** (resp. **le plus grand élément**) si il minore (resp. majore) tous les éléments de E.*
- *On dit que E est totalement ordonné si on peut comparer tout les éléments de E entre eux.*
- *On appelle digramme de **Hasse** de le relation son diagramme sagittale en ôtant les boucles correspondant à la réflexivité et les flèches pouvant être induites via la transitivié.*

Par exemple, le diagramme sagittale  *sera représenté* 

Remarque 8 *Si un plus grand élément (resp. un plus petit) existe alors il est unique et on la note* $\sup(E)$ *(resp.* $\inf(E)$ *).*

Exercice 108 *Le diagramme suivant est le diagramme de Hasse d'une relation d'ordre :*



1. *Entourer les minorants et les majorants.*
2. *L'ensemble est-il totalement ordonné ?*
3. *Y a-t-il un plus grand élément ? un plus petit ?*

Exercice 109 *On considère deux ensembles ordonnés* $(A, \prec_1)$ *et* $(B, \prec_2)$. *On définit sur* $A \times B$ *la relation* $\prec$ *par :*

$$(a, b) \prec (a', b') \iff a \prec_1 a' \text{ et } a \prec_2 b'.$$

1. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur $A \times B$.
2. Est-ce que $A \times B$ est totalement ordonné si A et B le sont ?
3. À quelle condition $A \times B$ a-t-il un plus grand élément ?

Exercice 110 *Soit* $(E, \preceq)$ *un ensemble totalement ordonné dont les éléments* $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n$ *sont numérotés de façon que*

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \ldots \preceq x_n.$$

Quelle particularité présente son diagramme cartésien ? La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 111 *On dit qu'un ensemble est* ***bien ordonné*** *s'il est munit d'une relation d'ordre pour laquelle toute partie non vide possède un plus petit élément.*

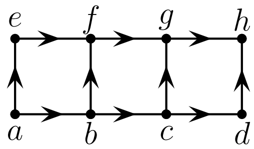
1. *Démontrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné. La réciproque est-elle vraie.*
2. *Démontrer qu'un ensemble bien ordonné admet un plus petit élément.*
3. *Donner un exemple d'ensemble bien ordonné qui admet un plus grand élément et un exemple d'ensemble bien ordonné qui n'en admet pas.*

Theorem 22 *Soit* E *un ensemble ordonné. Considérons* x *et* y *deux éléments quelconques de* A.

Si l'ensemble des majorants (resp. minorants) communs à x *et* y *admet un plus petit (resp. plus grand) élément* z *alors l'ensemble des majorants (resp. minorants) communs à* x *et* y *coïncide avec l'ensemble des majorants de* z *(resp. minorants).*

Dans ce cas, z *est noté* $\sup(x, y) = x \vee y$ *(resp* $\inf(x, y) = x \wedge y$ *).*

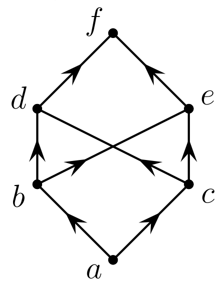
Example 5 *On ordonne* $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ *comme sur la figure ci dessous.*



Le sous-ensemble $\{g, h\}$ *est l'ensemble des majorants communs à* c *et* f*, et c'est aussi l'ensemble des majorants de* g.

Definition 23 *On dit qu'un ensemble ordonné* E *est un* ***treillis*** *si, quels que soient les éléments* x *et* y *et* E*, les éléments* $x \vee y$ *et* $x \wedge y$ *existent.*

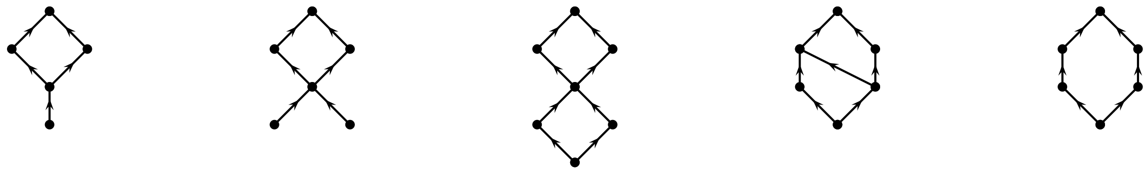
Exercice 112 *L'ensemble* $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ *est ordonné suivant le diagramme de Hasse ci-dessous.*



L'ensemble E *ainsi ordonné est-il un treillis ?*

Exercice 113 *Représenter les diagrammes de Hasse de tous les treillis à* $3,\ 4$ *et* 5 *éléments.*

Exercice 114 *Parmi les diagrammes de Hasse ci-dessous, repérez les treillis.*



Theorem 24 *Tout ensemble totalement ordonné est un treillis.*

Definition 25 *On dit qu'un treillis est* ***distributif*** *si $\wedge$ et $\vee$ sont distributifs l'un par rapport à l'autre.*

Exercice 115 *Construire un treillis non distributif.*

Definition 26 *Soit E un treillis ayant un plus petit et un plus grand élément. On dit qu'un élément x et E est* ***complémenté*** *s'il existe au moins un élément $y \in A$ tel que*

$$x \vee y = \sup(E)$$

et

$$x \wedge y = \inf(E).$$

Un treillis est dit complémenté si chacun de ses éléments est complémenté.

Theorem 27 *Si E est un treillis distributif et complémenté alors on peut munir E d'une structure d'algèbre de Boole.*

Exercice 116 *Dire si les treillis suivants sont complémentés ou distributifs.*

Annexe A

Formulaire

A.1 Opérations ensemblistes

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E. Pour simplifier l'écriture, on notera $\overline{A} = \complement_E A$

Commutativité de $\cup$ et de $\cap$

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

Associativité de $\cup$ et de $\cap$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

Double distributivité

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Idempotence de $\cup$ et de $\cap$

$$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

Neutralité

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap E &= A \end{aligned}$$

Absorption

$$\begin{aligned} A \cup E &= E \\ A \cap \emptyset &= \emptyset \end{aligned}$$

Complémentarité

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} &= E \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ \overline{E} &= \emptyset \\ \overline{\emptyset} &= E \\ \overline{\overline{A}} &= A \end{aligned}$$

Loi de De Morgan

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}.\end{aligned}$$